Dr. Martin Jesenko
Dr. Andrea Korsch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2018

Übungsblatt 2

Nun haben wir Matrizen als rechteckige Zahlenschemata eingeführt. Man kann sie komponentenweise mit einem Skalar multiplizieren und zwei gleich große Matrizen kann man ebenso addieren. Zusätzlich haben wir noch die Multiplikation zweier Matrizen geeigneter Dimensionen (und als Spezialfall die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor) definiert.

Mit Matrizen kann man eine beliebige lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen darstellen. Allerdings hängt die Darstellungsmatrix von der Wahl der Basen im Start- und Zielraum ab, was auch aus der Aufgabe 3 ersichtlich ist. Weiterhin kann man mit Hilfe der Matrizen systematisch lineare Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren analysieren, das vollständig die Lösbarkeit und die Struktur der Lösungsmenge bestimmt.

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik II für Ingenieure“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Freitag, der 11. Mai 2018, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Es seien U und V Vektorräume, $(\boldsymbol{g}_1, \dots, \boldsymbol{g}_n)$ eine Basis von U und $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n$ beliebige Vektoren aus V. Zeigen Sie, dass genau eine lineare Abbildung $\mathscr{A} : U \to V$ existiert, so dass

$$\mathscr{A}\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{w}_i \quad \text{für jedes } i = 1, \dots, n.$$

2. Berechnen Sie für die Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ A_4 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix},\ A_5 := \begin{pmatrix} 5 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ihre Transponierten und alle wohldefinierten Produkte A_iA_j, $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (es darf $i = j$ sein).

3. Gegeben ist die Abbildung

$$\mathscr{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathscr{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 10x - 8y + 2z \\ 20x + 4y - 20z \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{A}$ linear ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von $\mathscr{A}$ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$.

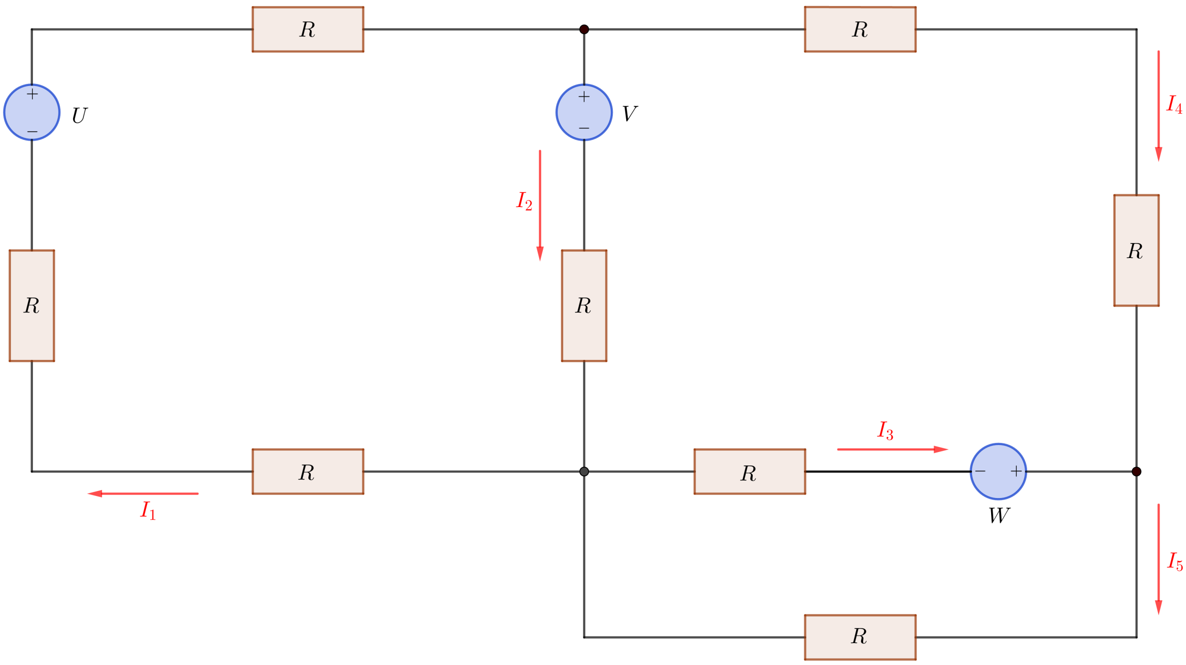
(c) Zeigen Sie, dass

$$\underline{G} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \underline{H} := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

auch Basen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ sind.

(d) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von $\mathscr{A}$ bezüglich $\underline{G}$ und $\underline{H}$.

4. Ein elektrischer Stromkreis besteht aus Gleichspannungsquellen und Widerständen wie auf dem Bild abgebildet.



Die Kirchhoff'schen Regeln liefern dann die folgenden Gleichungen: In den linken zwei Knoten muss für die Stromstärken $I_1 - I_2 - I_4 = 0$ und $I_2 + I_5 - I_1 - I_3 = 0$ gelten. Dazu kommen noch drei Gleichungen für die Maschen: $U + V - 3RI_1 - RI_2 = 0$, $V + W + 2RI_4 - RI_2 - RI_3 = 0$ und $W - RI_3 - RI_5 = 0$. Dabei ist $R = 300\,\Omega$, $U = V = 300\,\mathrm{V}$ und $W = 200\,\mathrm{V}$.

(a) Schreiben Sie das Gleichungssystem für Stromstärken in der Matrixform (also $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$) um.

(b) Lösen Sie das System mit dem Gauß'schen Eliminiationsverfahren.

(c) Hat das System für alle (positiven) Spannungen U, V und W eine Lösung und ist sie eindeutig?